**Formule per il calcolo degli elementi geometrici – dentature esterne**

*Contenuto:*

- *Definizione di evolvente*
- *Spessore di base in funzione di uno spessore qualunque e viceversa.*
- *Ingranaggi cilindrici a denti diritti con dentatura normale*
- *Ingranaggi cilindrici a denti diritti con spostamento di profilo*
    - *Senza spostamento di profilo*
    - *Con spostamento di profilo*
- *Ingranaggi cilindrici con denti elicoidali con dentatura normale*
- *Ingranaggi cilindrici con dentatura elicoidale e spostamento di profilo*
    - *Senza spostamento di profilo*
    - *Con spostamento di profilo*
- *Determinazione della linea di ingranamento e del raggio attivo del dente*
- *Calcolo dello spessore ed addendum cordale*
- *Misure dello spessore su z' denti*
- *Controllo degli ingranaggi su sfere*

Gli ingranaggi cilindrici hanno il profilo dei denti che è un tratto di evolvente di cerchio.
Vediamo ora cos'è e che proprietà ha questa curva.
La curva "*evolvente*" in senso generale, è il luogo dei punti descritto da un'estremità di una semiretta che rotola, senza strisciare, su una curva.
In particolare se la curva è un cerchio si ottiene appunto *l'evolvente di cerchio* che forma il profilo dei denti degli ingranaggi comunemente usati.
La classica costruzione di questa curva è quella che si ottiene avvolgendo un filo inestensibile attorno ad un cilindro e di svolgerlo tenendolo sempre teso. L'estremità libera di questo filo percorrerà appunto una traiettoria che è l'evolvente di cerchio.
Nella figura N°1 è indicato chiaramente questo concetto.

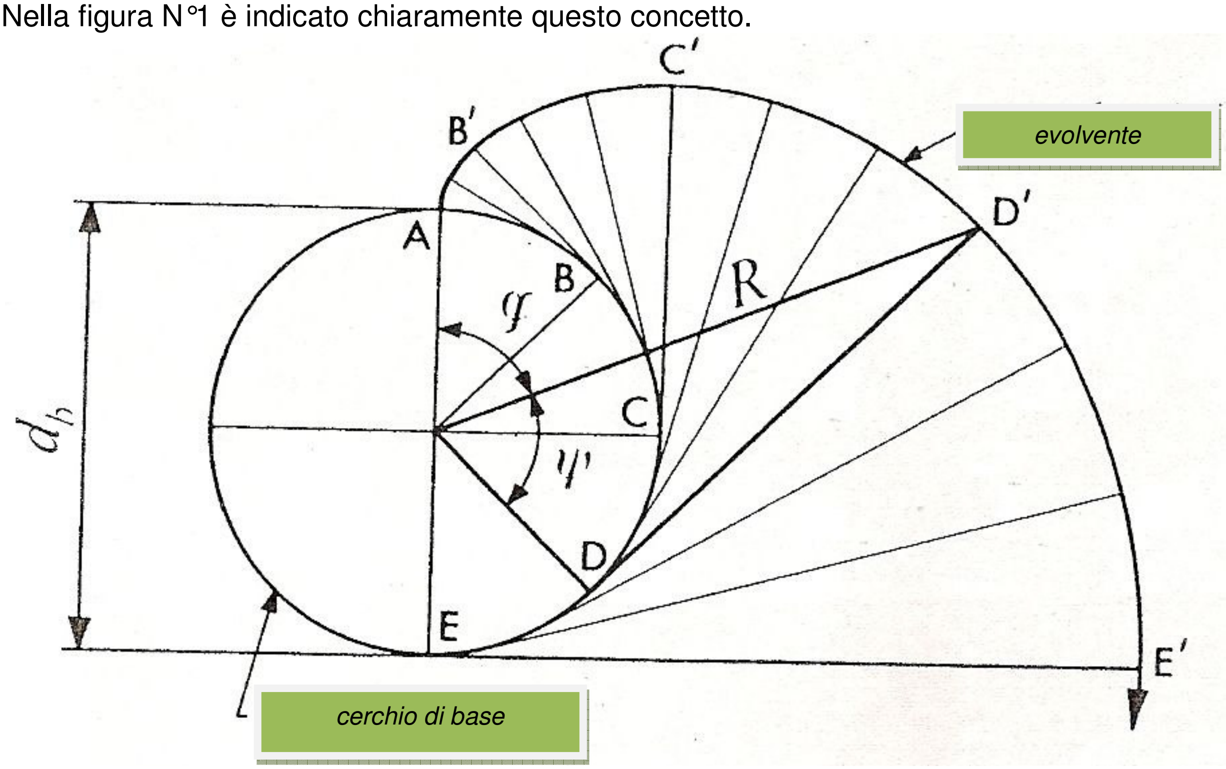


**Fig. N°1**

I segmenti BB' – CC' – DD' possono essere pensati come il filo che si srotola dal cerchio di base con diametro $d_b$ .
E' subito evidente che le lunghezze di questi segmenti sono rispettivamente uguali agli archi di cerchio $\widehat{AB}$ - $\widehat{AC}$ - $\widehat{AD}$.
Poiché il triangolo ODD' (O è il centro del cerchio) è retto perchè DD' tangente al cerchio si ha che, indicando con $r_g$ il raggio del cerchio base di diametro $d_b$ , l'equazione parametrica dell'evolvente di cerchio è:

$$R = \frac{r_g}{\cos\psi} = r_g \cdot \sec\psi$$

$$\varphi = \tan\psi - \psi = inv\ (\psi)$$

Infatti il tratto DD' = $r_g \cdot \tan\psi$ è anche uguale all'arco $\widehat{AD}$, cioè a $r_g \cdot (\varphi + \psi)$ con gli angoli espressi in radianti, e quindi risulta: $\tan\psi = (\varphi + \psi)$
La funzione $inv\ (\psi)$ è molto importante perché facilita di molto, come vedremo, i calcoli dei vari elementi del dente dell'ingranaggio.
Esistono delle tabelle specifiche che, per ogni valore dell'angolo ψ danno il valore della funzione "*involuta*".
A questo punto, poiché si dovranno scrivere una serie di formule è opportuno dare un elenco del significato dei simboli e degli indici utilizzati.

| *Significato dei simboli* | | | |
|---|---|---|---|
| a | *Interasse* | m | *Modulo* |
| α | *Angolo di pressione* | Q | *Distanza esterna delle sfere (quota controllo)* |
| β | *Angolo di elica* | r | *Raggio* |
| d | *Diametro* | $R_a$ | *Raggio attivo di piede del dente* |
| g | *Lunghezza della linea d'ingranamento* | s | *Spessore del dente relativo al diametro d* |
| $g_1$ | *Porzione della linea di ingranamento* | $\bar{s}_{os}$ | *Spessore cordale* |
| $g_2$ | *Porzione della linea di ingranamento* | t | *Passo* |
| $h_f$ | *Dedendum* | w | *Spessore su z' denti per dentatura dritta* |
| $h_k$ | *Addendum* | W | *Spessore si z' denti per dentatura elicoidale* |
| $h_0$ | *Addendum cordale* | z | *Numero di denti* |
| $h_r$ | *Altezza dente* | x | *Coefficiente di correzione del profilo* |
| l | *Larghezza del vano* | | |
| *Significato degli indici* | | | |
| b | *Riferito al cerchio di funzionamento* | n | *Riferito alla sezione normale* |
| c | *Riferito al cerchio di taglio* | o | *Riferito al cerchio primitivo* |
| f | *Riferito al cerchio interno* | q | *Riferito al cerchio passante per il centro sfere* |
| g | *Riferito al cerchio di base* | r | *Riferito a sfere* |
| k | *Riferito al cerchio sterno* | s | *Riferito alla sezione apparente* |
| i | *Riferito a ideale* | w | *Riferito all'utensile* |

Nella seguente figura N°2, sono rappresentati due rami di evolvente che formano, nelle sue caratteristiche fondamentali un dente di ingranaggio.
Nella figura il tratto che va dal centro del cerchio base al punto E è indicato con $\sec\alpha$ , mentre la tangente al cerchio base passante per il punto E è indicata con $\tan\alpha$ queste due espressioni sono riferite al caso di un raggio di base unitario.

*<u>Spessore di base in funzione di uno spessore qualunque e viceversa.</u>*

$$s_g = (\psi + 2\vartheta) \cdot r_g \qquad \text{in cui} \qquad \psi = \frac{s}{r}$$

e viceversa si ha

$$s = \left(\frac{s_g}{r_g} - 2 \cdot inv\ \alpha\right) \cdot r$$

Dove si vede che $\vartheta = inv\ \alpha$ in cui $\alpha$ è l'angolo di pressione nei punti E e D.
Si capisce già da qui l'importanza della funzione $inv\ \alpha$ .

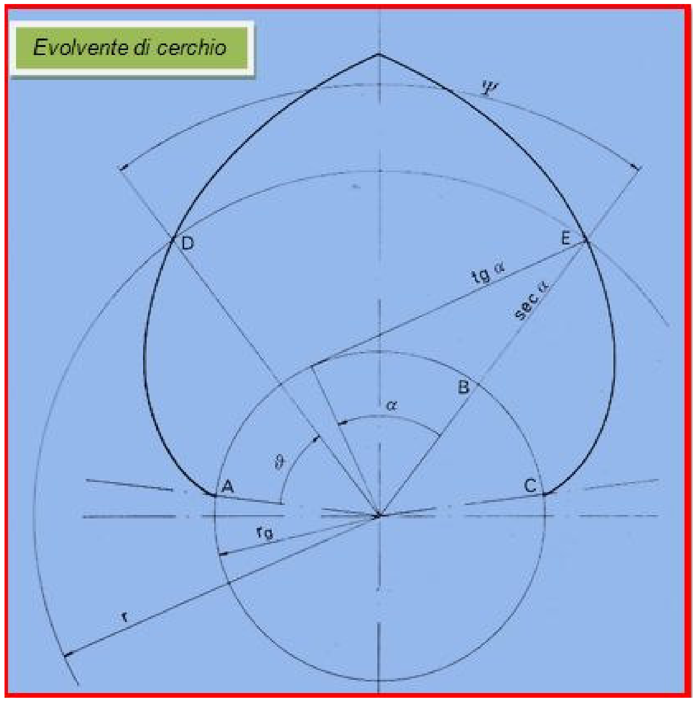


**Fig. N°2**

*Ingranaggi cilindrici a denti diritti con dentatura normale*

Con riferimento alla figura N°3, valgono le seguenti relazioni:

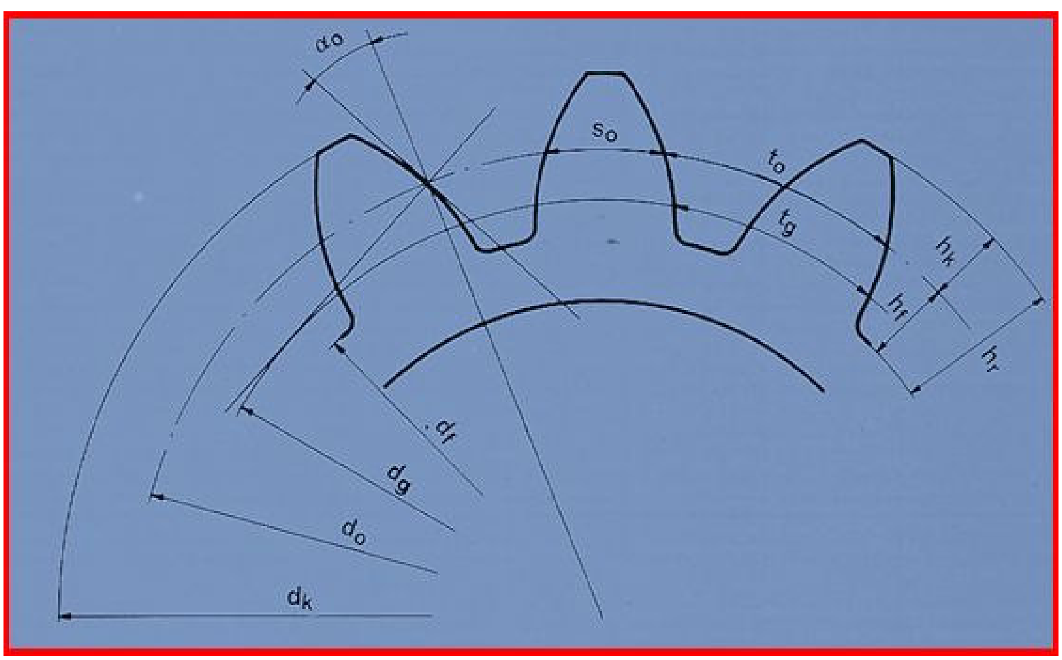


**Fig. N°3**

$d_o = m \cdot z$

$t_o = m \cdot \pi$

$d_g = d_o \cdot \cos\alpha_o$

$t_g = t_o \cdot \cos\alpha_o$

$h_k = m$

$h_f = \frac{7}{6} \cdot m$ oppure $h_f = \frac{5}{4} \cdot m$

$h_r = h_k + h_f$

$d_k = d_o + 2h_k$

$d_f = d_o + 2h_f$

$s_o = \frac{m \cdot \pi}{2}$

*<u>Ingranaggi cilindrici a denti diritti con spostamento di profilo</u>*

Si chiama spostamento di profilo $\boldsymbol{x \cdot m}$ la distanza tra la linea di riferimento **a** della cremagliera generatrice e la retta di rotolamento **b** ed è da intendersi con il segno **+** quando la linea di rifermento della cremagliera è esterna al cerchio primitivo di taglio **c** della ruota, con il segno **–** in caso contrario.

Con riferimento alla figura N°4 si ha:

a)- *Senza variazione di interasse*:

$h_k = m + x \cdot m$

$h_f = \frac{7}{6} \cdot m - x \cdot m$ oppure $h_f = \frac{5}{4} \cdot m - x \cdot m$

$s_{oc} = \frac{m \cdot \pi}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \tan\alpha_o$

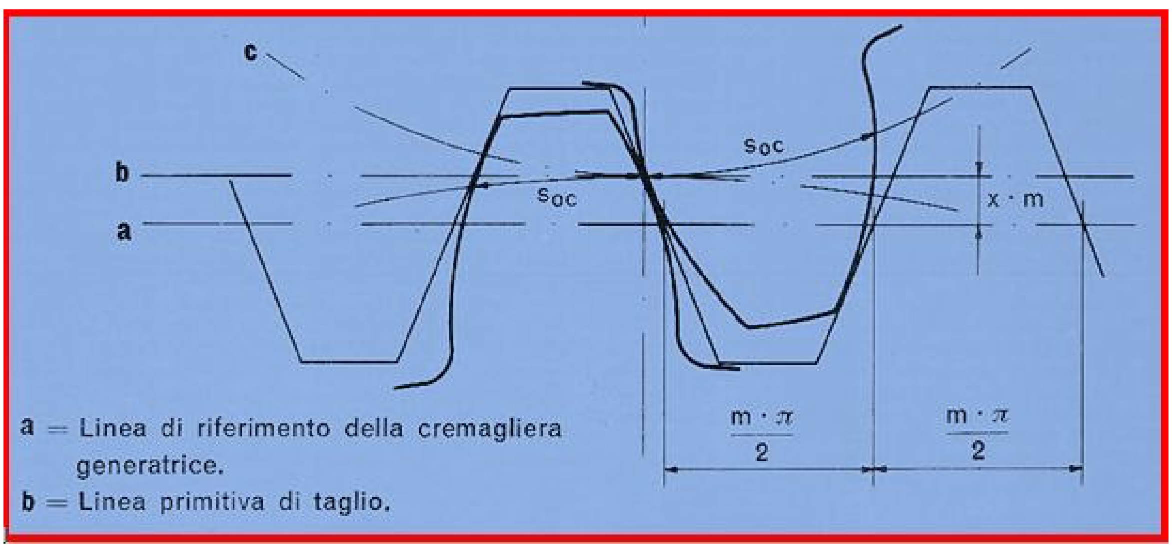


**Fig.N°4**

b)- *Con variazione di interasse*

Le cose qui sono un po' più complesse in quanto bisogna considerare la coppia di ingranaggi, cioè lo spostamento sui due ingranaggi accoppianti.

Con riferimento alla figura N°5 si ha:

$inv\ \alpha_b = inv\ \alpha_o + 2\tan\alpha_o \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2}$

$a_b = a\frac{\cos\alpha_o}{\cos\alpha_b}$ $d_b = \frac{d_g}{\cos\alpha_b}$

$$s_b = r_b \left[\frac{s_{oc}}{r_o} + 2(inv\ \alpha_o - inv\ \alpha_b)\right]$$

$$k = \frac{z_1 + z_2}{2}\left[2\frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} - \left(\frac{\cos\alpha_o}{\cos\alpha_b} - 1\right)\right]$$

$$d_k = m(z + 2 + 2x - 2k)$$

$h_r = m(2{,}25 - k)$ oppure $h_r = m(2{,}167 - k)$

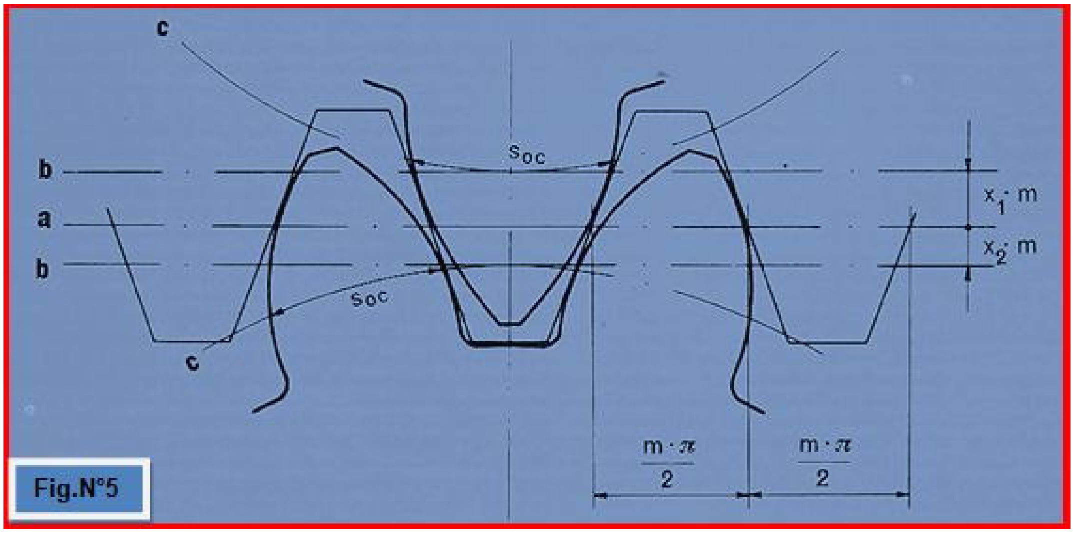


Fig.N°5

*Ingranaggi cilindrici a denti elicoidali con dentatura normale*

Con riferimento alla figura N°6 si hanno le seguenti relazioni.

$d_o = m_s \cdot z$ $\qquad$ $t_{os} = m_s \cdot \pi$

$d_g = d_o \cdot \cos\alpha_{os}$ $\qquad$ $t_{gs} = t_{os} \cdot \cos\alpha_{os}$

$m_n = m_s \cdot \cos\beta_o$ $\qquad$ $\tan\alpha_{on} = \tan\alpha_{os} \cdot \cos\beta_o$

$t_{on} = m_n \cdot \pi$ $\qquad$ $t_{gn} = t_{on} \cdot \cos\alpha_{on}$

$h_k = m_n$ $\qquad$ $h_f = \frac{7}{6} \cdot m_n$ oppure $h_f = \frac{5}{4} \cdot m_n$

$h_r = h_k + h_f$ $\qquad$ $d_k = d_o + 2h_k$

$d_f = d_o + 2 \cdot h_f$ $\qquad$ $s_{on} = \frac{\pi \cdot m_n}{2}$ $\qquad$ $s_{os} = \frac{\pi \cdot m_s}{2}$

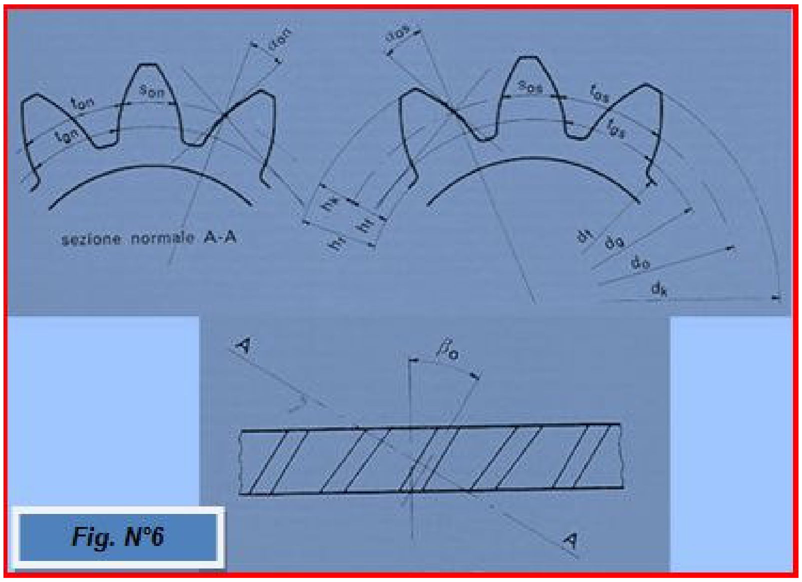

Fig. N°6

<u>*Ingranaggi cilindrici a denti elicoidali con spostamento di profilo*</u>

*a)- senza variazione di interasse (rif. figura N°4).*

$$h_k = m_n + x \cdot m_n$$

$$h_f = \frac{7}{6} \cdot m_n - x \cdot m_n \quad \text{oppure} \quad h_f = \frac{5}{4} \cdot m_n - x \cdot m_n$$

$$s_{onc} = \frac{m_n \cdot \pi}{2} + 2 \cdot x \cdot m_n \cdot \tan \alpha_{on}$$

$$s_{osc} = \frac{m_s \cdot \pi}{2} + 2 \cdot x \cdot m_n \cdot \tan \alpha_{os}$$

*b)- Con variazione di interasse (rif. Figura N°5)*

$$inv\ \alpha_{bs} = inv\ \alpha_{os} + 2 \tan \alpha_{on} \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2}$$

$$a_b = a \frac{\cos \alpha_{os}}{\cos \alpha_{bs}} \qquad d_b = \frac{d_g}{\cos \alpha_{bs}}$$

$$s_{bs} = r_b \left[ \frac{s_{osc}}{r_o} + 2(inv\ \alpha_{os} - inv\ \alpha_{bs}) \right]$$

$$k = \frac{z_1 + z_2}{2} \left[ 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} - \frac{1}{\cos \beta_o} \left( \frac{\cos \alpha_{os}}{\cos \alpha_{bs}} - 1 \right) \right]$$

$$d_k = m_n \left( \frac{z}{\cos \beta_o} + 2 + 2x - 2k \right)$$

$$h_r = m_n(2{,}25 - k) \quad \text{oppure} \quad h_r = m_n(2{,}167 - k)$$

*Determinazione della lunghezza della linea d'azione e del raggio attivo di piede $R_a$*

$$\rho_{k1} = \sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} \qquad \rho_{k2} = \sqrt{r_{k2}^2 - r_{g2}^2}$$

$$g = \rho_{k1} + \rho_{k1} - a_b \cdot \sin \alpha_b$$

$$g_1 = \quad \rho_{k1} - r_{b1} \cdot \sin \alpha_b \qquad g_2 = \quad \rho_{k2} - r_{b2} \cdot \sin \alpha_b$$

$$R_{a1o1} = \sqrt{(\rho_{k1o1} - g)^2 + r_{g1o2}^2}$$

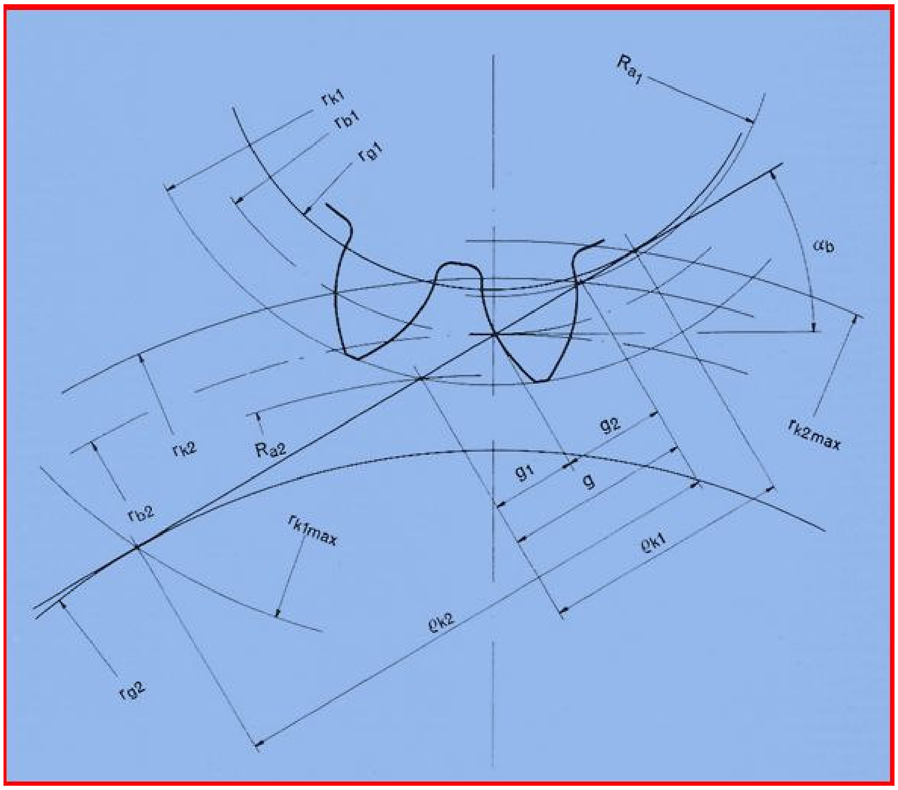


**Fig. N°9**

*Interferenza*
Il massimo diametro esterno senza interferenza è:

$$\boldsymbol{d_{kmax}} = \sqrt{\boldsymbol{d_g^2} + (\boldsymbol{2a_b} \cdot \mathbf{sin}\, \boldsymbol{\alpha_b})^2}$$

*Calcolo dello spessore ed addendum cordale*

Con riferimento alla figura N°10 si ha:

$$\frac{s_o}{\pi \cdot d} = \frac{\delta}{2 \cdot \pi} \quad \text{da cui} \qquad \delta = \frac{2 \cdot s_o}{d}$$

$$\overline{s_o} = d \cdot \sin\frac{\delta}{2}$$

$$h_o = h_k + \frac{d}{2}\left(1 - \cos\frac{\delta}{2}\right)$$

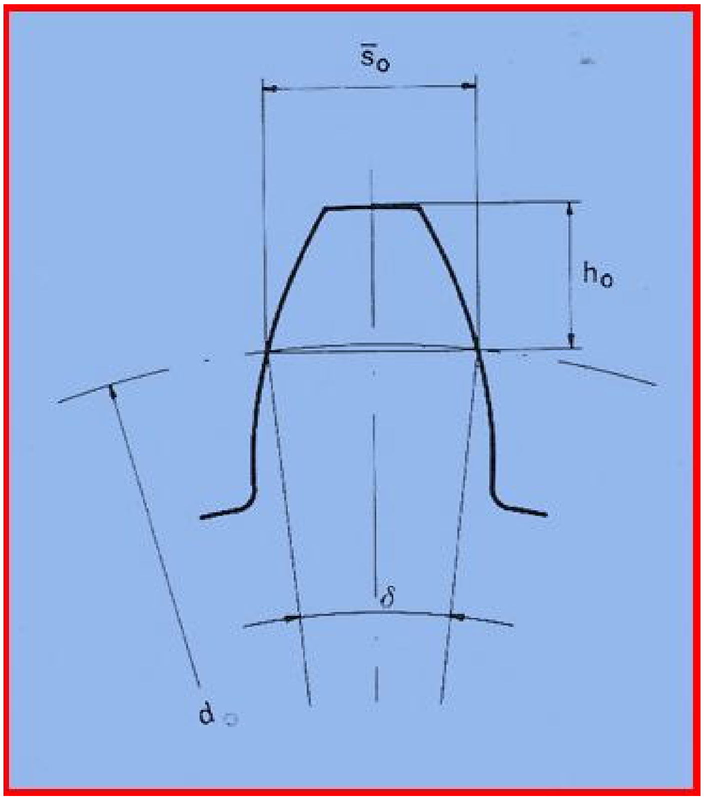


**Fig. N°10**

*Misura dello spessore su Z' denti*

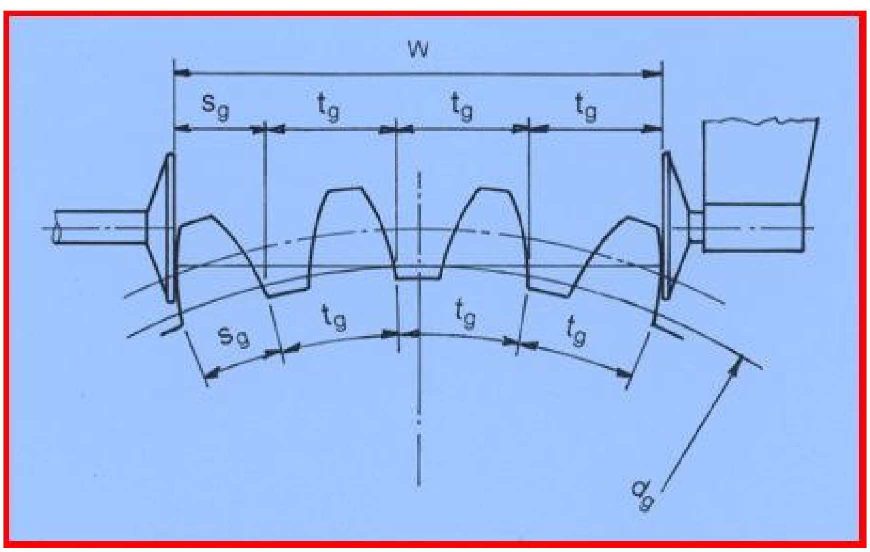


**Fig. N°11**

*Per dentature diritte*:

$$w = m \cdot \cos\alpha_o \cdot \left[(z'-1)\pi + \frac{s_o}{m} + z \cdot inv\ \alpha_o\right] + 2 \cdot x \cdot m \cdot \sin\alpha_o$$

Il numero di denti su cui effettuare la misura z' si calcola con:

$z' = z\frac{\alpha_o}{180°} + 0{,}5$ (con $\alpha_o$ in gradi)

Il risultato va arrotondato al numero intero più prossimo.

Se la dentatura ha uno spostamento di profilo $\geq 0{,}4 \cdot m$ la formula diventa:

$z' = z\frac{\alpha_o}{180°} + 0{,}5 + z \cdot \frac{\tan\alpha_x}{\pi} - (z+2x)\frac{\tan\alpha_o}{\pi}$ dove

$$\tan\alpha_x = \sqrt{\tan^2\alpha_o + 4\frac{x}{z}\sec^2\alpha_o + 4\left(\frac{x}{z}\right)^2\sec^2\alpha_o}$$

*Per dentature elicoidali:*

$$w = m_n \cdot \cos\alpha_{on} \cdot \left[(z'-1)\pi + \frac{s_{on}}{m_n} + z \cdot inv\ \alpha_{os}\right] + 2 \cdot x \cdot m_n \cdot \sin\alpha_{on}$$

essendo

$z' = z\left(\frac{\alpha_{os}}{180°} + \frac{\tan\alpha_{os} \cdot \tan^2\beta_g}{\pi}\right) + 0{,}5$ (con $\alpha_o$ in gradi)

Per effettuare la misura la condizione da soddisfare è che la larghezza del dente sia:

$b \geq w \cdot \sin\beta_g + b_M \cdot \cos\beta_g$

Dove $\beta_g$ è la lunghezza delle linee di contatto fra i piattelli e denti (vedere figura N°12).

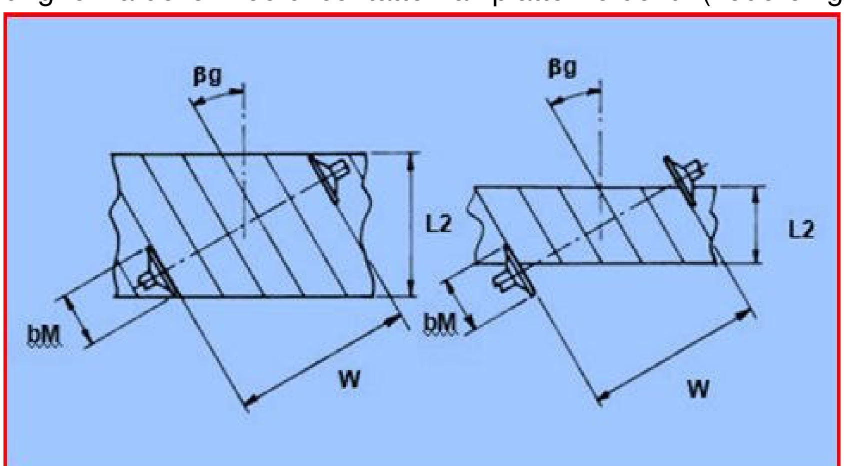


**Fig.N°12**

Se la dentatura ha uno spostamento di profilo molto grande conviene calcolare z' come segue:

$$z' = z\frac{\alpha_{os}}{\pi} + 0{,}5 + \frac{z}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\tan^2\alpha_{on} + 4\frac{x}{z}\cos\beta_o\left(1+\frac{x}{z}\cos\beta_o\right)(\tan^2\alpha_{on}+\cos^2\beta_o)}}{\cos\beta_o(\sin^2\alpha_{on}+\cos^2\beta_o\cdot\cos^2\alpha_{on})} -$$

$$-\frac{z}{\pi}\tan\alpha_{os} - 2\frac{x}{\pi}\tan\alpha_{on}$$

*Controllo degli ingranaggi con sfere*

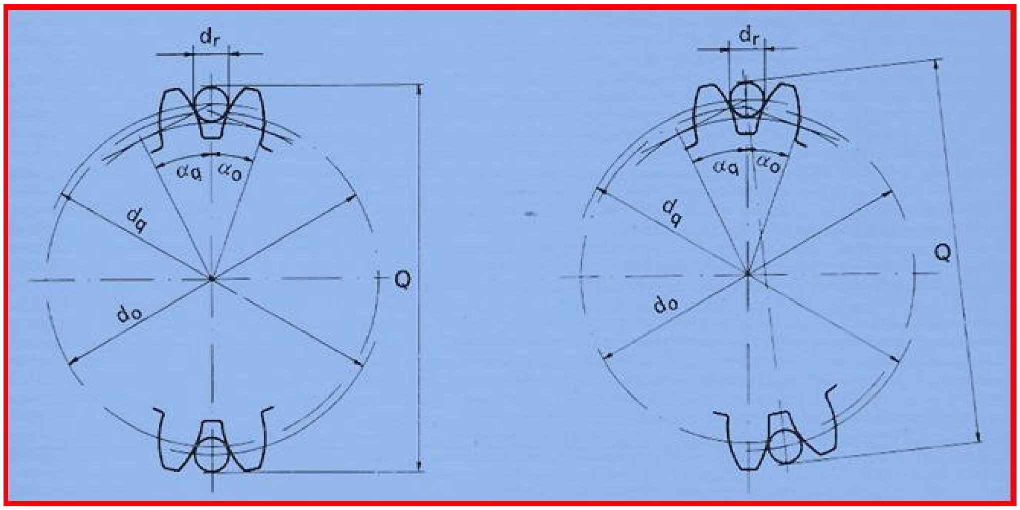


**Fig.N°13**

*Dentatura diritta con denti pari*

$inv\ \alpha_q = inv\ \alpha_o + \frac{d_r}{2r_o\cdot\cos\alpha_o} - \frac{l_o}{2r_o}$ da cui si ricava $\alpha_q$

$r_q = r_o\frac{\cos\alpha_o}{\cos\alpha_q}$ $\quad\quad$ $Q = \mathbf{2\cdot r_q + d_r}$

*Dentatura diritta a denti dispari*

Con gli stessi $\alpha_q$ e $r_q$ si ha $\quad Q = \mathbf{2\cdot r_q\cdot\cos\frac{\pi}{2z} + d_r}$

*Dentatura elicoidale con denti pari*

$$inv\ \alpha_{qs} = inv\ \alpha_{os} + \frac{d_r}{2r_{os}\cdot\cos\beta_o\cos\alpha_{on}} - \frac{l_{os}}{2r_{os}}$$

$r_{qs} = r_{os}\frac{\cos\alpha_{os}}{\cos\alpha_{qs}}$ $\quad\quad$ $Q = \mathbf{2\cdot r_{qs} + d_r}$

*Dentatura elicoidale con denti dispari*

Con gli stessi $\alpha_{qs}$ e $r_{qs}$ si ha $\quad Q = \mathbf{2\cdot r_{qs}\cdot\cos\frac{\pi}{2z} + d_r}$